Egzamin zerowy — Funkcje Analityczne

25.01.2024

- Proszę pisać rozwiązanie **każdego zadania na osobnej** kartce.
- Każdą kartkę proszę podpisać: **imieniem, nazwiskiem, numerem indeksu** oraz **numerem grupy** ćwiczeniowej lub **nazwiskiem** osoby prowadzącej ćwiczenia.
- Czas pisania: 180 minut.

Zadanie 1 (10 p.)

Policz całkę

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin(\pi x)}{x^2+2x+5}\,dx.$$

Zadanie 2 (5 p.) √

Zbadać liczbę zer (uwzględniając krotności) wielomianu $P(z) = 4z^5 + 6z^2 + 1$ w pierścieniu $\{z \in \mathbb{C}\colon 1 < |z| < 2\}$.

Zadanie 3 (15 p.)

Rozważmy funkcję

$$f(z) = \exp\left(\frac{10+z^2}{100-z^2}\right) \cdot \frac{(z+1)(z-3)}{(z-2i)(z+4i)}.$$

√(a) (5 p.) Znajdź wszystkie punkty osobliwe funkcji f i określ ich typ.

(b) (5 p.) Niech $\Omega = \{z \in \mathbb{C}\colon 3 < |z| < 4\}$ oraz rozważmy drogę zamkniętą $\gamma\colon [0,1] \to \Omega$, daną wzorem $\gamma(t) = \frac{7}{2}\exp(4\pi i t)$. Wyznacz wartość całki

$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz.$$

(c) (5 p.) Czy na obszarze Ω istnieje holomorficzna gałąź funkcji $\log(f)$?

Zadanie 4 (10 p.)

Znajdź maksymalny (w sensie inkluzji) obszar, na którym całka

$$f(z) = \int_{-\infty}^{1} \frac{e^{z^2 t}}{2-t}\,dt$$

definiuje funkcję holomorficzną.